Examen de Análisis de Variable Compleja
Cuarto curso de Matemáticas
Especialidades de Metodología y Estadística e I.O.
19 de Diciembre de 1997.

1. Definamos, para cada $z \in \mathbb{C}^*$, $h(z) = \log(-iz) + i\dfrac{\pi}{2}$. Dado $\alpha \in]-1,1[$, intégrese la función
$$f(z) = \frac{\exp(\alpha h(z))h(z)}{1+z^2}$$
a lo largo de la frontera de la mitad del anillo $A(0;\varepsilon,R)$, $0 < \varepsilon < 1 < R$, que está contenida en el semiplano superior para obtener el valor de las integrales
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \log(x)}{1+x^2}\,dx \text{ y } \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,dx$$

2. Dados un número natural n y dos números reales distintos de cero a y b, determinar el número de ceros del polinomio
$$z^{2n} + az^{2n-1} + b^2$$
situados en el semiplano de la derecha.

3. Constrúyase un isomorfismo conforme, φ, del dominio
$$\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C}^* : |\arg(z)| < \frac{\pi}{4} \right\}$$
sobre el disco unidad, verificando que $\varphi(1) = 0$ y $\varphi(2) = \frac{3}{5}$. Justifíquese que tal isomorfismo es único.

4. Sea $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$, y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ una función continua en $\overline{\Omega}$, holomorfa en Ω y que tiene límite finito en infinito. Justifíquese que la función $|f|$ alcanza un máximo absoluto en un punto de la circunferencia unidad y que, si f no es constante, la función φ definida para todo $r > 1$ por
$$\varphi(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$$
es estrictamente decreciente.